2次曲線の分類

一般の 2 次曲線は，x, y に関する 2 次方程式 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$（$a$, b, c, f, g, h は定数）… Ⓐ　で表される。x, y の 2 次方程式が，2 次曲線以外の図形を表す場合を除いて考えれば，方程式 Ⓐ は，

① $h=0$，$a=b(\neq 0)$のとき　円　　　② $h^2-ab=0$ のとき　放物線

③ $h^2-ab<0$ のとき　楕円　　　④ $h^2-ab>0$ のとき　双曲線　　を表す。

〔解説〕$h=0$ のとき，2 次方程式 $ax^2+by^2+2gx+2fy+c=0$ が 2 次曲線を表す場合は，軸が座標軸に平行な場合であり，①～④が成立する。

$h\neq 0$ のとき，$(x,\ y)$を原点のまわりに角$\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$だけ回転した点を$(u,\ v)$とする。

このとき，$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ であるから，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$

$$\therefore\quad x=u\cos\theta+v\sin\theta,\qquad y=-u\sin\theta+v\cos\theta$$

これを $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ に代入すると，

$$a(u\cos\theta+v\sin\theta)^2+2h(u\cos\theta+v\sin\theta)(-u\sin\theta+v\cos\theta)+b(-u\sin\theta+v\cos\theta)^2$$
$$+2g(u\cos\theta+v\sin\theta)+2f(-u\sin\theta+v\cos\theta)+c=0$$

$$(a\cos^2\theta-2h\cos\theta\sin\theta+b\sin^2\theta)u^2+2((a-b)\sin\theta\cos\theta+h(\cos^2\theta-\sin^2\theta))uv$$
$$+(a\sin^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta)v^2\ +2(g\cos\theta-f\sin\theta)u+2(f\cos\theta+g\sin\theta)v+c=0$$

$$\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cos2\theta-h\sin2\theta\right)u^2+2\left(\frac{a-b}{2}\sin2\theta+h\cos2\theta\right)uv$$
$$+\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\cos2\theta+h\sin2\theta\right)v^2+2(g\cos\theta-f\sin\theta)u+2(f\cos\theta+g\sin\theta)v+c=0$$

ここで，$A=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{a-b}{2}\cos2\theta-h\sin2\theta$，$H=\dfrac{a-b}{2}\sin2\theta+h\cos2\theta$，

$B=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{a-b}{2}\cos2\theta+h\sin2\theta$，$G=g\cos\theta-f\sin\theta$，$F=f\cos\theta+g\sin\theta$　とおくと，

$Au^2+2Huv+Bv^2+2Gu+2Fv+c=0$ である。

$A+B=a+b$，$(A-B)^2=\left\{(a-b)\cos2\theta-2h\sin2\theta\right\}^2$ より，

$$AB-H^2=\frac{1}{4}\left\{(A+B)^2-(A-B)^2\right\}-H^2$$
$$=\frac{1}{4}\left\{(a+b)^2-\left((a-b)\cos2\theta-2h\sin2\theta\right)^2\right\}-\left(\frac{a-b}{2}\sin2\theta+h\cos2\theta\right)^2=ab-h^2$$

$H=0$ となるように角θ を定めると，

$a\neq b$ のとき，$\tan2\theta=\dfrac{2h}{b-a}$，　$a=b$ のとき，$\cos2\theta=0$ より$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ である。

このとき，$Au^2+Bv^2+2Gu+2Fv+c=0$ と表され，$AB=ab-h^2$ であるから，

放物線となるとき $AB=0$，楕円となるとき $AB>0$，双曲線となるとき $AB<0$ である。

2 次曲線以外を表す場合としては，例えば，

② $h^2-ab=0$ のとき，$(x+y+1)^2=0$（直線）や$(x+y+1)^2=1$（平行な 2 直線）を表す

③ $h^2-ab<0$ のとき，$x^2+y^2+1=0$ のように表す図形が存在しない

④ $h^2-ab>0$ のとき，$(x+y+1)(x-y-2)=0$（交わる 2 直線）を表す

などが考えられる。